



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017

Filiera teoretică: profil real, specializarea științele naturii
Clasa a XII-a

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & mx^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \right\}.$

a) Determinați numărul real m , astfel încât G să fie parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Pentru $m = 2$, demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Demonstrați că grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă cu proprietatea că $f^{-1}(0) = 1$. Pe mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, definim legea de compoziție „*” prin $a * b = f[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 1]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Știind că $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ, se cere:

- a) Să se determine elementul neutru.
b) Să se afle $y \in \mathbb{R}$ astfel încât simetricul în raport cu legea „*” al elementului $a \in \mathbb{R}$ să fie $f[y - f^{-1}(a)]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

3. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x, & x > 2 \end{cases}.$

a) Arătați că f admite primitive pe intervalul de definiție.

b) Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea că $F(3) = \frac{10}{3}$.

4. Se consideră șirurile $I_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)dx$ și

$$J_n = \int_0^1 x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)dx, \quad n \geq 1.$$

a) Să se calculeze J_1 și J_2 .

b) Să se arate că $(-1)^n I_n \leq 0$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Utilizând eventual schimbarea de variabilă $t = 1 - x$, să se arate că $I_n = (-1)^n (J_n - nJ_{n-1})$, oricare ar fi $n \geq 2$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7